# 吸积盘随机振荡光度功率谱密度中低频准周期振荡现象的研究*

陈培杰 汪志云

（湖北文理学院物理与电子工程学院 襄阳 441053）

**摘要** 采用含频率涨落噪声和指数形式关联随机力作用的广义朗之万方程模型描述黑洞吸积盘的垂向振荡，推导出吸积盘随机振荡光度功率谱密度的解析表达式，并讨论了系统参数对功率密度谱中低频率准周期振荡（LFQPOs）现象的影响。研究结果发现：选取合适的系统参数时，功率密度谱曲线上出现了一个基频和一个二次谐频的共振双峰 LFQPOs，基频峰对应的中心频率为吸积盘振荡的特征频率，随机力关联时间决定了基频峰的高度和宽度，频率噪声强度和粘滞阻尼只对二次谐频峰产生影响。结果说明了吸积盘的随机振荡模型可作为 LFQPOs 起源的一种解释。

**关键词** 低频准周期振荡；吸积盘；频率涨落噪声；随机共振

**中图分类号**: P141.5　　**文献标识码**: A

低频准周期振荡（LFQPOs）是存在于黑洞双星暂现源的普遍现象，表现为 X 射线光变功率谱密度曲线上的宽峰，峰的中心频率范围从几 mHz 到 30Hz[1-3]。根据峰的品质因子、噪声和相位延迟等因素，LFQPOs 通常被分为 A、B、C 三种。其中，C 型 LFQPOs 是黑洞暂现源中最常见的类型，常在低硬态和硬中间态被观测到，频率范围在几 mHz 到 10 Hz 之间，但在高软态也能被观察到，其频率可达到~30Hz。C 型 LFQPOs 伴随着较强的平台噪声，其连续谱呈现近似的截断幂律谱轮廓，且通常由一个主峰和几个附加峰组成的复杂结构，其主峰的中心频率与振荡的基频有关，附加峰是指分别在基频的半频和二次谐频处出现的副谐频峰和谐频峰[2-5]。在少数情况下，谐频峰（或副谐频峰）的值与基频峰相当，形成一种特殊的“cathedral-like”，即双峰 LFQPOs。如：在 XTE J1550-564 和 XTE J1859+226 两个黑洞暂现源功率谱的相关频率处出现了两个强而窄的峰[6,7]。

虽然对 LFQPOs 的观测和研究取得了很大的进展，但是其物理起源一直是一个有争议的问题。其中，一个可能的起源是吸积盘的振荡。在吸积盘中，流体元受扰动的回复力作用时，在水平方向上作惯性振荡，垂向在赤道面附近作简谐振荡，且不同方向上的振荡是耦合的。这些振荡按照回复力的性质可以分为 *g*-模（gravity modes）、p-模（pressure modes）、c-模（corrugation modes）三种类型。研究发现：这些振荡被禁闭在吸积盘中一定区域内传播，即所谓“trapped oscillation”[8,9]。禁闭振荡的频率都与黑洞质量成反比，可能是黑洞暂现源中观测到的准周期振荡。其中，g-模和 p-模振荡频率都在高频准周期振荡的频率范围之内，而 c-模是低频振荡，被禁闭在内半径和内部垂向共振半径之间，其振荡频率与 LFQPOs 频率相当[2]。此外，Titarchuk 和 Osherovich 提出了吸积盘全局的垂向振荡模型，该模型假设整个盘的垂向振荡可以产生 0.1 Hz 左右的持续 LFQPOs[9]。

以上吸积盘的振荡模型并不能从观测的光谱上拟合 LFQPOs，且从 C 型 LFQPOs 的性质及宽带噪声的形状和强度可以看出，准周期振荡行为应该与含有附加噪声的随机系统有关。

*湖北省教育厅科学研究计划重点项目, (No. D20132603).

作者简介: 陈培杰，女，副教授. 研究方向:非线性随机动力学. *E-mail:* chenpeijie@hbuas.edu.cn

通讯作者: 汪志云，男，教授. 研究方向:天体高能辐射. *E-mail:* wangzhiyun@hbuas.edu.cn

因此，Harko 和 Leung 等人提出用广义 Langevin 方程描述吸积盘的随机振荡，并通过数值计算，得到振荡光度的功率谱密度，解释了一些观测结果[11,12]。Long 等人 2016 年利用此模型计算了三种不同情况下的光变曲线和功率谱，并通过幂律拟合功率谱来获得不同情况下的光谱指数，发现观测天体光谱指数变化是由盘振荡在不同情况之间的转换过程中引起的[13]。对于这样的随机系统，在一定条件下，能产生随机共振现象。而随机共振是乘性在随机动力系统中的非线性现象，已广泛应用于天文领域的研究[14]。因此，我们团队讨论了吸积盘随机振荡光度功率谱密度曲线中的随机共振现象[15-17]。并认为曲线中的共振峰为黑洞双星系统中准周期振荡现象的物理解释。在这些工作中，模型中的随机项仅存在于粘滞系数和外部作用力，吸积盘的振荡频率是固定不变的，在功率谱密度曲线中没有发现谐频峰。基于此，本文提出用包含频率涨落和随机力作用下的广义 Langevin 方程模型描述黑洞吸积盘的垂向振荡，计算吸积盘随机振荡光度的功率谱密度，讨论出现的双峰随机共振现象，为解释 C 型 LFQPOs 提供理论依据。

## 1 吸积盘随机振荡的功率谱密度

### 1.1 吸积盘振荡模型方程

考虑一包围致密天体的标准吸积薄盘，在受到外界随机力和内部粘滞力作用时，盘中单位质量粒子的垂向振荡可用广义的朗之万方程描述[12]：

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\xi\frac{dz}{dt}+\omega_\perp^2 z=f(t), \tag{1}$$

式中，$z$ 和 $\omega_\perp$ 分别表示粒子垂向振荡的位移和频率，$\xi$是吸积盘内部的粘滞耗散作用系数，为常量。外部作用力 $f(t)$ 是指数形式关联的湍流作用随机力，满足以下统计性质：

$$\langle f(t)\rangle=0,\langle f(t)f(t')\rangle=De^{-\lambda|t-t'|}, \tag{2}$$

式中，$\langle\cdots\rangle$表示平均值。$D$ 为常数，表示随机力作用的强度，$\lambda$表示随机力关联时间的倒数，即时间关联率，其大小和盘振荡频率关系会影响吸积盘振荡与湍流作用的耦合[18]。在此，我们设定$\lambda$小于盘的振荡频率。

假设吸积盘的垂向振荡频率受外界因素的影响存在涨落，其表示式可以写成[19]：

$$\omega_\perp^2=\omega_0^2+\eta(t), \tag{3}$$

频率涨落$\eta(t)$是高斯型白噪声随机量，其统计特性为:

$$\langle\eta(t)\rangle=0,\langle\eta(t)\eta(t')\rangle=\varepsilon\omega_0^2\delta(t-t'). \tag{4}$$

其中，$\varepsilon$表示噪声强度大小的参数，设定其在$0\le\varepsilon\le1$范围内，因为若$\varepsilon$值较大时，频率噪声会迫使功率谱密度曲线上的峰较宽，而降低峰的品质因子 Q 值 [18]。$\omega_0$ 为吸积盘垂向振荡的特征角频率，其表示式为[10]:

$$\omega_0=2\pi\nu_0=\frac{4.4\pi\times10^3\,Hz}{m}\left\{\frac{2-\gamma}{r_{in}^3}\frac{\left[1-\gamma/(\gamma+1)r_{adj}\right]}{r_{adj}^{\gamma}r_{out}^{2-\gamma}}\right\}^{1/2}, \tag{5}$$

式中，$m=M/M_\odot$ ,$M$ 和 $M_\odot$ 分别为中心天体和太阳的质量；$r_{in}=R_{in}/3R_S$ 是吸积盘内边缘的半径，$R_S=2GM/c^2$ 是史瓦西半径；$r_{out}=R_{out}/R_{in}$ 和 $r_{adj}=R_{adj}/R_{in}$ 分别表示

盘的外边缘半径和调整半径；面密度指数γ可以取 3/5 或 3/4[10].

为了计算的简便，假定 $\beta=\xi/2$ 作为吸积盘内部的粘滞阻尼系数，则(1)可以写成：

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\beta\frac{dz}{dt}+[\omega_0^2+\eta(t)]z=f(t). \tag{6}$$

假设两个随机量是不相关联的，满足 $\langle f(t)\eta(t')\rangle=0$。通过对方程(6)作拉普拉斯变换，可以求得任意时刻粒子振荡的位移和速度：

$$z(t)=\langle z(t)\rangle+\int_0^t H(t-s)[f(s)-\eta(s)z(s)]ds, \tag{7}$$

$$v(t)=\langle v(t)\rangle+\int_0^t \dot{H}(t-s)[f(s)-\eta(s)z(s)]ds, \tag{8}$$

式中，$\dot{H}$ 表示 $\frac{dH}{dt}$. 假设初始位移和速度为 $z(0)=z_0, v(0)=v_0$，则位移和速度的平均值 $\langle z(t)\rangle$ 和 $\langle v(t)\rangle$ 为：

$$\langle z(t)\rangle=v_0H(t), \langle v(t)\rangle=v_0\dot{H}(t). \tag{9}$$

在 $\omega_0>\beta$ 的情况下，方程的响应函数 $H(t)$ 和 $\dot{H}(t)$ 为：

$$H(t)=\frac{e^{-\beta t}}{\omega}\sin\omega t, \dot{H}(t)=\frac{e^{-\beta t}}{\omega}(\omega\cos\omega t-\beta\sin\omega t), \tag{10}$$

式中，$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$。

**1.2　振荡位移和速度的关联函数**

根据 Mankin 等人给出的广义朗之万方程中的位移和速度关联函数的计算方法[20]，定义位移的方差 $\sigma^2(t)$，及位移和速度的时间关联函数 $\kappa_z(t,\tau)$ 和 $\kappa_v(t,\tau)$ 为：

$$\sigma^2(t)=\langle[z(t)-\langle z(t)\rangle]^2\rangle, \tag{11}$$

$$\kappa_z(t,\tau)=\langle[z(t+\tau)-\langle z(t+\tau)\rangle][z(t)-\langle z(t)\rangle]\rangle, \tag{12}$$

$$\kappa_v(t,\tau)=\langle[v(t+\tau)-\langle v(t+\tau)\rangle][v(t)-\langle v(t)\rangle]\rangle. \tag{13}$$

根据随机量 $\eta(t)$ 和 $f(t)$ 统计过程的独立性，它们满足以下统计关系：

$$\begin{gathered}\langle f(t_1)\eta(t_2)z(t_2)\rangle=\langle f(t_1)\eta(t_1)z(t_2)\rangle=0, \langle f(t)z(t)\rangle=0,\\ \langle z(t_1)z(t_2)\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle=\delta(t_1-t_2)\langle z^2(t_2)\rangle\end{gathered} \tag{14}$$

则位移和速度的关联函数可以表示为：

$$\begin{aligned}\kappa_z(t,\tau)=&\int_0^t\int_0^{t+\tau}H(t_1)H(t_2+\tau)\langle f(t_1)f(t_2)\rangle dt_1dt_2\\&+\int_0^t H(t_1)H(t_1+\tau)\langle\eta(t_1)\eta(t)\rangle\sigma^2(t-t_1)dt_1\end{aligned}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\kappa_v(t,\tau)=&\int_0^{t+\tau}\int_0^t\dot{H}(t_1)\dot{H}(t_2+\tau)\langle f(t_1)f(t_2)\rangle dt_1dt_2\\&+\int_0^t\dot{H}(t_1)\dot{H}(t_1+\tau)\langle\eta(t_1)\eta(t)\rangle\sigma^2(t-t_1)dt_1\end{aligned}. \tag{16}$$

当 $t\to\infty$ 时，以上公式变为：

$$\kappa_{za}(\tau)=D\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}H(t_1)H(t_2)e^{-\lambda|t_2+\tau-t_1|}dt_1dt_2+\bar{\sigma}^2\int_0^{\infty}H(t_1)H(t_1+\tau)dt_1\ , \tag{17}$$

$$\kappa_{va}(\tau)=D\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\dot{H}(t_1)\dot{H}(t_2)e^{-\lambda|t_2+\tau-t_1|}dt_1dt_2+\bar{\sigma}^2\int_0^{\infty}\dot{H}(t_1)\dot{H}(t_1+\tau)dt_1\ , \tag{18}$$

式中，$\bar{\sigma}^2$ 是渐近状态下位移方差的时间齐次部分,$t\to\infty$ 时，$\kappa_{za}(0)=\bar{\sigma}^2$，则可得到：

$$\bar{\sigma}^2=\frac{2D(2\beta+\lambda)}{\omega_0^2(4\beta-\varepsilon)(\omega_0^2+2\beta\lambda+\lambda^2)}\ . \tag{19}$$

**1.3　随机振荡光度的功率谱密度**

吸积盘中单位质量粒子振荡的总能量为：

$$E=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}\omega_0^2z^2\ . \tag{20}$$

由于外部随机力、及内部粘滞耗散和频率涨落噪声的作用，粒子的总能量会部分损失，损失的能量即为粒子振荡的光度 $L(t)$，由方程(6)和(20)可得到：

$$L(t)=-\frac{dE}{dt}=2\beta v^2+\eta(t)zv-f(t)v\ . \tag{21}$$

在 $t\to\infty$ 时,光度的稳态平均自相关函数定义为：

$$C_{LL}(\tau)=\lim_{t\to\infty}\langle[L(t+\tau)-\langle L(t+\tau)\rangle][L(t)-\langle L(t)\rangle]\rangle \tag{22}$$

将方程(17), (18)和(21)代入方程（22），得到:

$$\begin{aligned}C_{LL}(\tau)=\lim_{t\to\infty}[&4\beta^2\langle\Theta^2(t+\tau)\rangle\langle\Theta^2(t)\rangle+8\beta^2\langle\Theta(t+\tau)\Theta(t)\rangle^2\\&-2\beta\langle\Theta^2(t+\tau)\rangle\langle f(t)\Theta(t)\rangle-4\beta\langle\Theta(t+\tau)\Theta(t)\rangle\langle f(t)\Theta(t+\tau)\rangle\\&-2\beta\langle f(t+\tau)\Theta(t+\tau)\rangle\langle\Theta^2(t)\rangle+\langle f(t+\tau)\Theta(t+\tau)\rangle\langle f(t)\Theta(t)\rangle\\&+\langle\eta(t+\tau)\eta(t)\rangle\langle\Theta(t+\tau)\Theta(t)\Phi(t+\tau)\Phi(t)\rangle]\end{aligned} \tag{23}$$

式中: $\Theta(t)=\int_0^t\dot{H}(t-t')[f(t')-\eta(t')z(t')]dt'$，$\Phi(t)=\int_0^t H(t-t')[f(t')-\eta(t')z(t')]dt'$.

通过傅利叶变换，方程（23）转换成振荡光度的功率谱密度 $PSD(\nu)$

$$PSD(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}C_{LL}(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau\ . \tag{24}$$

通过复杂的计算，并忽略掉不含频率ν的常数项，可得到 $PSD(\nu)$ 的表示式：

$$\begin{aligned}PSD(\nu)=&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}a_3}[\frac{4D^2\lambda^2(2a_2a_4^2+a_4a_7a_5-a_5^2a_6)}{\omega^2(a_1^2-4\beta^2\lambda^2)^2}+\frac{\varepsilon^2\omega_0^4\bar{\sigma}^2(2a_6\omega^2-2a_6\beta^2+3a_7\beta\omega-4a_2\beta^2)}{2\omega^2}]\\&+\frac{(\beta+\lambda)(a_1+2\beta\lambda+4\pi^2\nu^2)}{\sqrt{2\pi}a_8}[\frac{D^2\lambda a_5}{\beta\omega(a_1-2\beta\lambda)^2}+\frac{D\varepsilon^2\omega_0^4\bar{\sigma}}{2\beta}]+\frac{\varepsilon^2\omega_0^4\bar{\sigma}^2\beta(\beta^2+\omega_0^2)}{\sqrt{2\pi}\omega^2(4\beta^2+4\pi^2\nu^2)}\\&+\frac{\omega(a_1+2\beta\lambda-4\pi^2\nu^2)}{\sqrt{2\pi}a_8}[\frac{D^2\lambda a_4}{2\beta\omega(a_1-2\beta\lambda)^2}-\frac{D\varepsilon\omega_0^2\bar{\sigma}(a_1^2+12\beta^2\lambda^2)}{2\omega(a_1^2-4\beta^2\lambda^2)}]\\&+\frac{8\sqrt{2}D^2\lambda^3a_1^2}{\sqrt{\pi}(4\lambda^2+4\pi^2\nu^2)(a_1^2-4\beta^2\lambda^2)}\end{aligned} \tag{25}$$

式中：

$a_1 = \omega_0^2 + \lambda^2$， $a_2 = \beta\omega^2(12\pi^2\nu^2 - 4\omega_0^2)$，

$a_3 = [16\pi^4\nu^4 + 32(\beta^2 - \omega^2)\pi^2\nu^2 + 16\omega_0^4](4\beta^2 + 4\pi^2\nu^2)$，

$a_4 = \beta(\omega_0^2 - \lambda^2)$， $a_5 = \omega(\omega_0^2 + \lambda^2)$，

$a_6 = \beta[4(\beta^2 + \pi^2\nu^2)^2 + 24\beta^2\omega^2 - 8\omega^2\pi^2\nu^2 + 8\omega^4]$，

$a_7 = 16\omega(\beta^2 + \pi^2\nu^2)(\pi^2\nu^2 - \omega_0^2)$， $a_8 = (a_1 + 4\pi^2\nu^2)^2 - 16\omega^2\pi^2\nu^2$.

## 2 模型参数对功率谱密度曲线中 LFQPOs 的影响

根据解析表达式（25），可计算不同参数作用下盘振荡光度的功率密度谱，并发现曲线中出现了单峰和双峰的随机共振现象。这些随机共振峰即为 LFQPOs。下面主要讨论系统参数$(\varepsilon, \lambda, \beta, \nu_0)$对 LFQPOs 的影响。

### 2.1 LFQPOs 随特征振荡频率 $\nu_0$ 的变化

在我们的模型中，通过计算发现随机力的强度 $D$ 不改变谱线的轮廓，因此在以下的分析中取 $D$=1，且吸积盘垂向振荡的特征频率 $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ 近似为 C 型 LFQPOs 的基频。由方程（5）可知，$\omega_0$ 依赖于吸积盘的结构和中心天体的质量。选择不同的盘参数，使振荡频率在 LFQPOs 的范围内。在其它参数保持不变时，图 1 给出了不同特征频率下的功率谱密度曲线，均呈现出与 LFQPOs 相吻合的低频截断幂律谱轮廓。

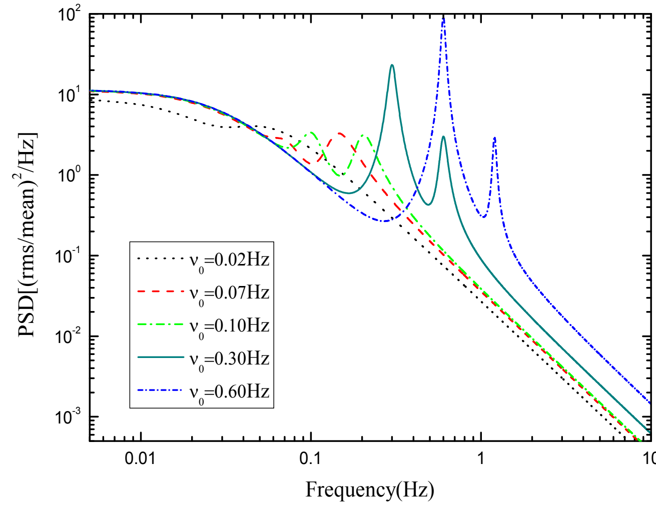



图 1 振荡频率取不同值时，振荡光度的功率谱密度曲线，参数为 $\varepsilon = 0.38, \beta = 0.1, \lambda = 0.01, D = 1$。

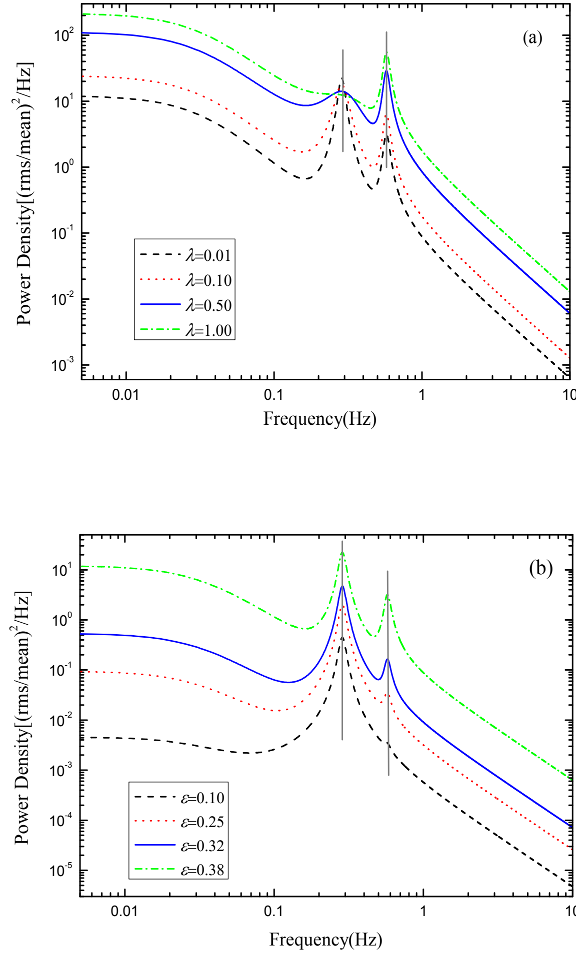
**Fig. 1** The PSD of the stochastically oscillating luminosity for different characteristic frequencies and $\varepsilon = 0.38, \beta = 0.1, \lambda = 0.01, D = 1$.

从图 1 可以看出，当 $\nu_0$ 取不同值时，小于截断处频率的低频部分的功率变化很小，并且高频部分的谱斜率基本保持不变。然而，曲线中的随机共振峰（LFQPOs）对 $\nu_0$ 十分敏感。只有当 $\nu_0$ 达到一定的值时，才出现一个基频峰和一个附加的二次谐频峰。双峰的中心频率分别对应的 $\nu_0$ 和 $2\nu_0$。随着 $\nu_0$ 的减小，两个峰变低、变宽，且基频峰变化更快。当 $\nu_0$ 减小

到 0.07 时，基频峰几乎消失，在曲线上只留下一个较宽的二次谐频峰。随着 $\nu_0$ 进一步减小，谐频峰也越来越弱，直至其完全消失。在 $\nu_0 = 0.02$ 时，功率谱密度随频率的增加而单调减小，不存在 LFQPOs。这说明吸积盘振荡的频率越高，由随机共振出现的准周期振荡现象越明显。

### 3.2 LFQPOs 随$\varepsilon, \lambda$和$\beta$等参数的变化

由方程（21）可以发现：吸积盘的振荡光度主要是由粘滞耗散、随机力和频率涨落噪声共同作用下产生的，这三种作用在模型中分别由粘滞阻尼系数$\beta$、时间关联率$\lambda$和噪声强度$\varepsilon$三个参数控制。为了讨论各参数对 LFQPOs 的影响，我们取同文献[10]一致的吸积盘几何参数，即 $r_{in} = 1$，$r_{out} = 10^4$，$\gamma = 3/5$，$r_{adj} = 3$。天体的质量选取被观测到频率在 0.1-10Hz 范围内 C 型 LFQPOs 的黑洞候选体 XTE J1550–564 的质量[7]。根据 Remillard 等 2006 年评估的该候选体质量范围 $8.4M_{\odot} \sim 10.8M_{\odot}$[1]，取 $m$=9.6。将这些参数代入方程（5），计算得到吸积盘振荡的特征频率为 $\nu_0 = 0.289Hz$。当 $\nu_0$ 固定不变，$\varepsilon, \lambda, \beta$取不同值时，振荡光度的功率谱密度曲线如图 2 所示。曲线中都出现了期望的单峰或双峰的 LFQPOs，且各参数对谱线的影响各不相同。



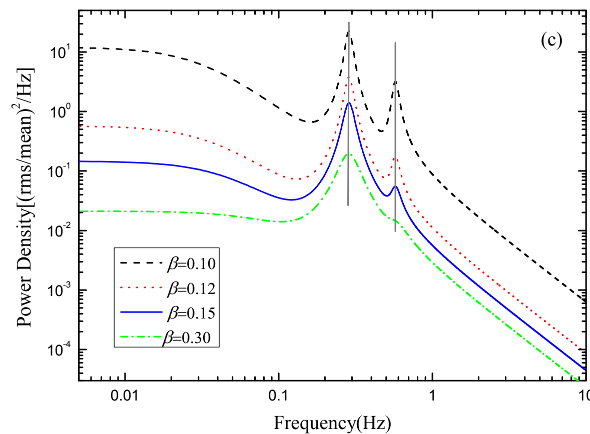



图 2 λ, ε和β分别取不同值时，振荡光度的功率谱密度曲线，参数为(a) $\beta=0.1, \varepsilon=0.38$；(b) $\beta=0.1, \lambda=0.01$；(c) $\lambda=0.01, \varepsilon=0.38$，垂直线标注 LFQPOs 的中心频率。

**Fig.2** The PSDs of the stochastically oscillating luminosity for different values of λ, ε and β:(a) $\beta=0.1, \varepsilon=0.38$; (b) $\beta=0.1, \lambda=0.01$; (c) $\lambda=0.01, \varepsilon=0.38$, vertical lines mark the central frequencies of LFQPOs.

图 2 清晰地表明，当吸积盘的振荡频率固定时，LFQPOs 基频峰的中心频率不随其它参数发生变化。这些参数只影响 LFQPOs 峰的高度和宽度。如：随机力时间关联率λ对基频的峰影响较大，而对二次谐频峰几乎不产生影响（如图 2(a)所示），且随着λ的增大，曲线上移，说明随机力的关联时间越短，谱密度越大，但是其基频对应的峰值却在减小，峰变得更宽更平，直至消失，此时 LFQPOs 只包含一个中心频率为 $2\nu_0$ 的单峰。刚好相反，频率噪声强度ε和粘滞阻尼系数β却只对二次谐频峰有较大的影响，对基频峰的影响确很小（如图 2(b)和(c)所示）。当增大ε，或减小β，功率密度谱曲线上移，二次谐频峰变得更加尖锐。而ε取较小值，或β取值较大时，二次谐频峰都会消失。以上说明随机力关联时间越短，频率噪声强度越大，阻尼越小，吸积盘振荡与湍流作用、内部噪声和粘滞作用更容易产生共振，LFQPOs 现象越明显。

## 3 总结

本文考虑频率涨落噪声和指数形式关联随机力的作用，改进了吸积盘垂向随机振荡的Langevin方程模型，发现在振荡光度功率谱密度曲线上产生了广义的单峰和双峰随机共振，用来解释包含一个基频峰和二次谐频峰的LFQPOs。LFQPOs峰是由粘滞耗散、频率噪声和外界湍流随机力共同作用产生共振的结果，而且基频峰对应的中心频率为吸积盘振荡的特征频率 $\nu_0$，随机力关联时间决定了基频峰的高度和宽度，频率噪声强度和粘滞阻尼对二次谐频峰产生影响。

研究结果证实了吸积盘的随机振荡模型对于描述X射线光变是近似有效的，能较好地解释LFQPOs现象。在模型中，LFQPOs的中心频率仅由吸积盘的振荡频率决定。可以想象，如果通过调整吸积盘的几何结构，使其振荡的频率在瞬时获得足够大，将会产生高频的准周期振荡（HFQPOs），在合适的动力学条件下，可以通过共振解释观测到的3:2HFQPOs对，这需要我们下一步建立更加复杂的吸积盘随机振荡模型，去拟合观测到的HFQPOs。

参考文献:

[1] REMILLARD R A, MCCLINTOCK J E. X-ray properties of black-hole binaries [J]. Annual Review of Astronomy & Astrophysics, 2006, 44(1): 49-92.

[2] INGRAM A, MOTTA S. A review of quasi-periodic oscillations from black hole X-ray binaries: observation and theory [J]. New Astronomy Reviews, 2019, 85:101524.

[3]张亮，陈黎，李兆辉，等．黑洞暂现源中的准周期振荡现象[J],天文学进展，2014，32(3):313-337.

[4] CASELLA P, BELLONI T, STELLA L. The ABC of low-frequency quasi-periodic oscillations in black hole candidates: Analogies with Z sources [J]. The Astrophysical Journal, 2005, 629(1): 403-407.

[5] ZHANG L, MÉNDEZ M, ALTAMIRANO D, et al. A systematic analysis of the phase lags associated with the type-C quasi-periodic oscillation in GRS 1915+105 [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2020, 494(1): 1375-1386.

[6]CASLLA P, BELLONI T, HOMAN J, et al. A study of the low-frequency quasi-periodic oscillations in the X-ray light curves of the black hole candidate XTE J1859+226 [J]. Astronomy and Astrophysics, 2004, 426: 587-600.

[7] HOMAN J, WIJNANDS R, VAN DER KLIS M, et al. Correlated X-Ray spectral and timing behavior of the black hole candidate XTE J1550-564: A new interpretation of black hole states [J]. The Astrophysical Journal Supplement Series, 2001, 132(2): 377-402.

[8] KATO S. Oscillations of disks [M]. Astrophysics and Space Science Library, Vol. 437, Springer Japan, 2016, doi:10.1007/978-4-431-56208-5.

[9] ABRAMOWICZ M A, FRAGILE P C. Foundations of black hole accretion disk theory (J), Living Reviews in Relativity, 2013, 16(1) :88.

[10] TITARCHUK L，OSHEROVICH V. The Global normal disk oscillations and the persistent low-frequency quasi-periodic oscillations in X-ray binaries[J]. The Astrophysical Journal, 2000,542(2): L111-L114.

[11] HARKO T，MOCANU G. Stochastic oscillations of general relativistic discs [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2012, 421(4): 3102-3110.

[12] LEUNG C S，WEI J Y，HARKO T，et al. Modelling the IDV emissions of the BL Lac objects with a Langevin type stochastic differential equation[J]. Journal of Astrophysics and Astronomy，2011，32(1-2): 189-192.

[13] LONG G B, OU J W, ZHENG Y G. Power spectrum density of stochastic oscillating accretion disk [J].Journal of Astrophysics and Astronomy, 2016, 37（2）: 10.

[14] 徐江，郭峰，陈勇．双稳系统中的随机共振乘性信噪作用研究[J]，天文研究与技术，2020，17(3)：292-298.

[15] WANG Z Y, CHEN P J, WANG D X, et al. Stochastic resonance of accretion disk and the persistent low-frequency quasi-periodic oscillations in black hole X-ray binaries[J]. Journal of Astrophysics and Astronomy，2013，34(1) :33-40.

[16] WANG Z Y，CHEN P J，ZHANG L Y. Stochastic resonance of a general relativistic accretion disk [J]. Chinese Physics Letters, 2013,30(9):099801-1-4.

[17] WANG Z Y，CHEN P J，Stochastic oscillations of general relativistic disks described by a fractional Langevin equation with fractional Gaussian noise [J]. Journal of Astrophysics and Astronomy,2016, 37(2): 8.

[18] ORTEGA-RODRÍGUEZ M, SOLÍS-SÁNCHEZ H, ÁIVAREZ-GARCÍA L. On twin peak quasi-periodic oscillations resulting from the interaction between discoseismic modes and turbulence in accretion discs around black holes [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2020, 492(2):1755-1760.

[19] GITTERMAN M. Classical harmonic oscillator with multiplicative noise [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2005, 352(2): 309-334.

[20] MANKIN R, LAAS K, SAUGA A. Generalized Langevin equation with multiplicative noise: Temporal behavior of the autocorrelation functions [J]. Physical Review E, 2011, 83(6): 061131-1-10.



**Research on the Low Frequency Quasi-periodic Oscillations in Power Spectral Density of the Stochastic Oscillating Luminosity of Accretion Disk**

Chen Peijie Wang Zhiyun

*(School of Physics and Electronic Engineering, Hubei University of Arts and Science, Xiangyang 441053)*

**Abstract:** In this paper, we improve the generalized Langevin equation model with fluctuating frequency and exponential function correlated stochastic force to describe the vertical oscillations of the accretion disk, then derive the analytical expression of the power spectrum density of stochastic oscillating luminosity, and discuss the influence of system parameters on low frequency quasi-periodic oscillations (LFQPOs) in power density spectrum. The results show that, for appropriate parameters, the double-peaked LFQPOs with a fundamental peak and a second harmonic peak can be found in the PSD curves, and the central frequency of primary peak correspond to the characteristic frequency of accretion disk oscillation $\nu_0$ . Moreover, the correlation time of stochastic force determines the height and width of the primary peak, and frequency noise intensity and viscous coefficient only influence the second harmonic peak. These results confirm that the stochastic oscillation model of accretion disk should be an alternative interpretation for the origin of LFQPOs.

**Key words:** Low frequency quasi-periodic oscillations; Accretion disk; Frequency fluctuation noise; Stochastic resonance